UNA VISION PANORÁMICA DE LA TEORÍA DE LAS CONTIENDAS

LUIS C. CORCHÓN (*)

Universidad Carlos III
Madrid

Esta mañana he logrado coger un taxi, en dura competencia con otras tres personas. Una vez en mi trabajo he tenido una reunión en la que he intentado que mi departamento se llevara la parte del león de unos fondos de investigación. A la hora de la comida hablo con unos compañeros sobre el Tour de Francia y sobre la lucha de dos potencias por una franja de terreno en el este de Europa. Entro un momento en mi cuenta de redes sociales que está sita en una de las dos plataformas que se disputan el liderazgo en este terreno. Pienso un poco en el resultado de las últimas elecciones. Quizá lograra escribir un buen trabajo sobre ello en alguna revista, aunque seguro que hay varios investigadores pensando en ello por lo que tendría una dura competencia. Por la noche veo la final de un concurso culinario. ¿Que tienen en común la búsqueda de un taxi, la discusión de unos presupuestos, el Tour de Francia, las guerras, las redes sociales, las elecciones, la publicación de artículos y los concursos televisivos? Pues que todas estas situaciones son ejemplos de una «contienda», o sea una situación en donde varios agentes luchan por obtener uno o varios premios ejercitando unos esfuerzos, o gastando dinero, que tienen un coste de oportunidad -ocio, trabajo en otras actividades, etc. Y a la vez, los agentes deben predecir cual va a ser el esfuerzo de los otros agentes implicados en la contienda.

La literatura sobre contiendas se desarrolló a partir de las contribuciones de Tullock (1967, 1980) y Krueger (1974) que estudiaron un caso particular de las contiendas, a saber, la búsqueda de rentas, y de Becker (1984) que estudió el lobbying (1). Panorámicas de la literatura de las contiendas son las de Nitzan (1994), Konrad (2006) y Corchón (2007). De hecho esta panorámica pretende actualizar y complementar esta última.

Empecemos por dar varios ejemplos de contiendas. En el cudro 1 (en página siguiente) se detallan el tipo de contienda, el premio, los medios para conseguirlo –que denominaremos genéricamente esfuerzo– junto con ejemplos de estas situaciones.

Como vemos hay contiendas que ocurren de manera natural, la guerra, la lucha por una patente, sin que la sociedad pueda influir mucho en su desarrollo, y contiendas que se diseñan como tales por algún planificador como los concursos y los deportes. Formalmente una contienda se describe por los siguientes elementos.

1| Una lista de contendientes, también llamados agentes. Denotaremos el conjunto de los mismos por $N = \{1, 2,\ldots, n\}$.

2| Los esfuerzos de cada contendiente. En esta panorámica supondremos que los esfuerzos son un número real que denotaremos por G_i para el contendiente i (2).

CUADRO 1
EJEMPLOS DE CONTIENDAS

Contienda	Premio	Esfuerzo	Ejemplo
Política	Gobierno	Publicidad, Compra Votos	Elecciones Generales, Locales
Litigación	Ganar Pleito	Gasto en Abogados	Herencias, Lindes
Guerras	Recursos	Gasto Militar	Guerras entre Países, Guerras Civiles
Lobby	Ley, Contrato	Publicidad, Sobornos	Regulación, Política Comercial
Concursos	Premio	Preparación del Candidato	Concursos TV, Funcionarios
Deportes	Liga, Copa	Gasto en Fichajes	Futbol, Baloncesto
I&D	Patente	Gasto en I&D	Medicinas, Tecnología

FUENTE: Elaboración propia..

3 Un premio que es valorado en V_i unidades por el contendiente *i*. Cuando todos los agentes tienen una valoración idéntica la denotaremos por *V* (3).

4 Una función que relaciona los esfuerzos de los agentes con las probabilidades de obtener el premio o, si este fuera divisible, sus proporciones. Esta función se denomina «función de éxito» (FE) y para el agente la escribiremos como $p_i = p_i(G_1, \ldots, G_n)$. También la llamaremos función de éxito clásica (FEC) para distinguirlas de otras, más recientes, que son variaciones de ésta y que se exponen en la subsección «Empates».

5 Una actitud ante el riesgo de los contendientes. En línea con la simplicidad que preside estas notas supondremos que los agentes son neutrales con respecto al riesgo.

6 El coste del esfuerzo que aquí, de nuevo por simplicidad, supondremos que tiene un coste medio, y marginal, constante e igual a uno.

Resumiendo, la contienda puede representarse como un juego en forma normal donde los jugadores son los contendientes, las estrategias son sus esfuerzos y sus pagos, denotados por Π, son la utilidad esperada, esto es:

$$\Pi_i(G_1,..,G_i,..,G_n) \equiv p_i(G_1,..,G_i,..,G_n)V_i - G_i \quad (1.1)$$

Para estos juegos la noción de equilibrio mas común es la que propuso John Nash en 1950, que generalizaba una idea avanzada en 1838 por Antoine-Agustin Cournot: un equilibrio es una situación de la cual no hay incentivos unilaterales a desviarse. Formalmente, $(G^*_1,\ldots,G^*_i,.., G^*_n)$ es un Equilibrio de Nash (EN) si:

$$\Pi_i((G^*_1,..,G^*_i,..,G^*_n) \geq \Pi_i(G^*_1,..,G_i,..,G^*_n), \text{ para todo } G_i \in \Re_+, \quad (1.2)$$

para cada agente *i*.

El lector interesado en propiedades como la existencia o la unicidad del EN o la estática comparativa puede consultar las secciones 3 y 4 de *mi survey* del 2007 (4). Las secciones 5 y 6 de aquel survey examinan cuestiones de bienestar social y la sección 7 examina la relación entre la búsqueda de rentas, el marco institucional y las políticas económicas.

FUNCIONES DE ÉXITO

Funciones de éxito clásicas

En este apartado nos centraremos en presentar los tres grandes tipos de FEC. Una panorámica de las aplicaciones de las FE a modelos econométricos se encuentra en Jia, Skaperdas y Vaidya (2013).

1 *«All pay auction»* (Hillman y Riley, 1989)

En español sería la «subasta donde todos pagan». Aquí el agente que realice el mayor esfuerzo gana con probabilidad uno. Es una especie de competencia a la Bertrand a la inversa, en la que una diferencia de un epsilon entre los esfuerzos, decanta totalmente la contienda hacia el agente que hace mayor esfuerzo. Desafortunadamente con esta FE no hay un EN en estrategias puras. La razón es que si los esfuerzos fueran diferentes el agente que realiza el esfuerzo mayor podría disminuir éste un poco, ahorrándose coste, y también ganaría el premio con probabilidad uno. Si los esfuerzos de ambos fueran iguales uno de ellos incrementando su esfuerzo infinitesimalmente podría conseguir todo el premio. Tenemos pues que considerar estrategias mixtas con todos los problemas de interpretación que estas conllevan. El lector puede echar un vistazo a l cuadro 1 y tratar de encontrar algún ejemplo en el que las estrategias mixtas parezcan razonables. Un estudio muy completo de los EN en estrategias mixtas se halla en el trabajo de Baye, Kovenock y de Vries (1996).

2 Las Diferencias (Hirshleifer, 1989)

En estas FE la probabilidad de ganar una contienda depende de la diferencia entre el esfuerzo de un agente y una medida del esfuerzo de los demás. En el caso de dos contendientes, esa probabilidad depende de la diferencia de los dos esfuerzos. Matemáticamente,

$$p_i = F_i(G_i - G_j), \; i, j = 1,2, \; i \neq j \quad (2.1)$$

Hirshleifer motiva estas FE diciendo que capturan «la tremenda ventaja de ser sólo un poco mas fuerte que nuestro oponente» (Hirshleifer 1991, p. 131). El problema de estas FE se ve claramente si suponemos diferenciabilidad. En ese caso, si intentamos resolver las condiciones de primer orden de maximización de los pagos para los agentes 1 y 2 nos encontramos con que, dado que $p_2 = 1 - p_1$, en un equilibrio interior:

$$F_1'(G_1 - G_2)V_1 - 1 = 0 \text{ y } F_1'(G_1 - G_2)V_2 - 1 = 0 \quad (2.2)$$

donde F' es la derivada de F. (2.2) implica que si las valoraciones son distintas, en el EN en estrategias puras, solo el agente que tiene la valoración mas alta hace un esfuerzo positivo (Baik (1998). Che y Gale (2000) estudiaron una forma no derivable de (2.1), a saber:

$$p_1 = \max\left\{\min\left\{\frac{1}{2} + s(G_1 - G_2), 1\right\}, 0\right\} \text{ y } p_2 = 1 - p_1 \quad (2.3)$$

en las que el equilibrio no ocurre necesariamente en la región en que la FE es derivable. Nótese que cuando $s = 0$ el resultado de la contienda es independiente de los esfuerzos y cuando $s \to \infty$ una pequeña diferencia en los gastos decanta totalmente el resultado del juego, esto es, estamos en la «*all pay auction*». Esta FE tiene el mismo problema que antes, esto es, a lo más un agente hace esfuerzo positivo en el EN en estrategias puras (5). La parte positiva es que permite el cálculo de EN en estrategias mixtas.

Todas estas FE tienen el problema adicional de que las probabilidades de ganar la contienda dependen de las unidades en las que se miden los esfuerzos (dólares o euros, minutos u horas, etc.). Alcalde y Dahm (2007) propusieron la siguiente FE que retiene la idea de las diferencias pero es homogénea de grado cero (HGC) (6): Suponiendo que $G_j \geq G_{j+1}$,

$$p_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{G_j^{\alpha} - G_{j+1}^{\alpha}}{j \cdot G_1^{\alpha}} \quad (2.4)$$

para $i = 1, \ldots, n$, con $G_{n-1} = 0$. En el apartado siguiente veremos otro intento de armonizar las FE basadas en las diferencias y la HGC, en este caso sobre unas bases diferentes.

3 La Ratio (Tullock, 1980) y sus extendiones

En este caso la probabilidad de que un agente gane la contienda es igual a la fracción del esfuerzo de ese agente con respecto al esfuerzo total. Matemáticamente,

$$p_i = \frac{G_i}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n} \quad (2.5)$$

para $i = 1, \ldots, n$. A veces se llama a esta FE una lotería porque es equivalente a la probabilidad de obtener un premio cuando tienes G_i tickets en una lotería donde hay $\Sigma_{j=i}^{n} G_j$ tickets. Una buena propiedad de esta FE es que, a diferencia de la FE basadas en las diferencias, es HGC y por lo tanto las probabilidades de ganar la contienda son invariantes ante un cambio proporcional de todos los esfuerzos debido a un cambio en las unidades de medida de éstos. Pero esta función o no está definida o es discontinua en 0. Esto es una propiedad general de las FE que son HGC (Corchón 2001). Se suele suponer que cuando todos los esfuerzos son cero, las probabilidades de éxito son todas $1/n$.

Esta forma funcional de la FE permite calcular el EN a través de las condiciones de primer orden de maximización de los pagos ya que las condiciones de segundo orden de maximización se cumplen. Por ejemplo cuando todos los contendientes son iguales en el único EN tenemos que:

$$p_i^* = \frac{1}{n}, \quad G_i^* = \frac{n-1}{n^2}V, \quad \textbf{y } \Pi_i^* = \frac{V}{n^2}. \quad (2.6)$$

Lo que nos da de inmediato las propiedades de estática comparativa del modelo: el esfuerzo individual aumenta con el premio y disminuye con el número de contendientes. Además el gasto total ($(n\text{–}1)V / n$)) tiende al valor del premio cuando el número de contendientes es grande. A ésta propiedad Tullock la denominó «disipación de las rentas» e implica que la suma de los pagos de los agentes en el EN (V / n) tienden a cero cuando el número de éstos es muy grande (7).

Debido a su flexibilidad y buen comportamiento esta ha sido la función de éxito mas usada. Una generalización de la (2.5) es la propuesta por Dixit (1987), que él llamó aditiva pero que también se conoce como logit:

$$p_i = \frac{\varphi(G_i)}{\sum_{j=1}^{n} \varphi(G_j)} \quad (2.7)$$

Una interpretación de (2.7) es que $\phi(G_i)$ mide el impacto de G_i en la contienda, esto es, resume los méritos de i. Por lo tanto el cociente $\phi(G_i) / \Sigma_{j=i}^{n} G_j$ mide el impacto (o mérito) relativo de i. Según (2.7) la probabilidad de que un agente gane la contienda es igual a su mérito relativo. Muchas de las FE propuestas en la literatura son casos especiales de esta formulación. Por ejemplo, $\phi(G_i) = G_i^{\varepsilon}$ a la que denominaremos FE Tullock ya que fue introducida por este autor en 1980. Si $\varepsilon = 1$ tenemos (2.5). Si $\varepsilon = 0$, la probabilidad de éxito es independiente del esfuerzo. Suele suponerse que $\varepsilon \in [0,1]$ para que la FE sea cóncava y las condiciones de primer orden de maximización de los pagos sean suficientes. De hecho es fácil calcular que en este caso el EN simétrico es:

$$G_i^* = \frac{\varepsilon(n-1)V}{n^2} \textbf{ y } \Pi_i^* = \frac{V(n - \varepsilon(n-1))}{n^2}. \quad (2.8)$$

Nótese que, cuando $\varepsilon < 1$ y el número de agentes es muy grande, las rentas no se disipan ya que el gasto total tiende a εV (y los pagos a ($V(1-\varepsilon)$). Pérez-Castrillo y Verdier (1992) estudiaron el caso en que puede ser mayor que 1. Cuando $\phi(G_i) = G_i + k$ tenemos la FE propuesta por Amegashie (2006) en la que k mide el «ruido» de la contienda, esto es, los factores que pueden influenciar el resultado de la misma pero que están fuera del control de los contendientes. Otro ejemplo de la FE aditiva es la propuesta por Hirshleifer (1989) donde para un $k>0$, $\phi(G_i) = e^{kG}$. Esta FE combina la forma aditiva con las diferencias ya que puede se escrita como:

$$p_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} e^{k(G_j - G_i)}}. \tag{2.9}$$

Pero esta FE no es cóncava en G_i. En Corchón (2007) el lector puede encontrar una panorámica de las propiedades de existencia y unicidad del EN así como de las propiedades de estática comparada cuando la FE es aditiva y las valoraciones son iguales y cuando estas no lo son y la FE es la ratio. Un estudio de las propiedades locales de estática comparada para FE aditivas y valoraciones no idénticas se encuentra en Acemoglu y Jensen (2013).

La forma funcional ratio también permite extensiones en las que el esfuerzo de los contendientes están tratados de forma asimétrica, así:

$$p_i = \frac{\alpha_i G_i}{\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \ldots + \alpha_n G_n} \tag{2.10}$$

donde α es el peso que se le da al esfuerzo de i. Los pesos diferentes se pueden motivar en términos de que la calidad de los esfuerzos es distinta, de la existencia de otro factor, digamos alguna forma de capital, que también influye en el resultado de la contienda o de la parcialidad de los jueces de la contienda hacia algunos de los concursantes.

Una FE que trata de aunar las ventajas de la ratio y las diferencias es la propuesta por Beviá y Corchón (2014) en la que cuando $n=2$,

$$p_i = \alpha + \beta \frac{G_i - sG_j}{\sum_{j=1}^{2} G_j} \tag{2.11}$$

donde α es la probabilidad que no depende de los gastos, β mide el impacto de los gastos relativos y s es un peso en el esfuerzo del competidor. Se supone que $2\alpha + \beta(1-s) = 1$ para que ambas probabilidades sumen uno y que aplicamos el operador max-min como en (2.3) para garantizar que ambas probabilidades son no negativas. Sumando y restando sG_i en el numerador del quebrado en (2.11) y eliminando α tenemos que:

$$p_i = 1 - (\alpha + \beta) + (2(\alpha + \beta) - 1)\frac{G_i}{\sum_{j=1}^{2} G_j} \tag{2.12}$$

con lo que esta FE es una transformación afín de la ratio. Beviá y Corchón encuentran una condición necesaria y suficiente para la existencia de EN cuando $n=2$. Cuando las valoraciones son idénticas esa condición es $\alpha+\beta \geq 1.5$ (nótese que para la FE ratio $\alpha = 0$ y $\beta = 1$). El EN además es único. Cuando $n>2$, muestran que hay una condición suficiente de existencia del EN que cuando las valoraciones son iguales es $n \geq n(\alpha + \beta) - 1$.

Hagamos notar que las herramientas desarrolladas para juegos con estrategias que son substitutos o complementos estratégicos no son de aplicación aquí (8). Por ejemplo en el caso (2.10) con y la función de mejor respuesta del jugador 1 es

$$G_1 = \sqrt[2]{V\alpha_2 G_2} - \alpha_2 G_2 \tag{2.13}$$

que es al principio creciente (complementos estratégicos) y luego decreciente (substitutos estratégicos). Es fácil probar que ésta propiedad se generaliza a las FE aditivas.

Otras funciones de éxito

Empates. En las FEC no existe término medio; la contienda se gana o se pierde. Pero en muchas contiendas existe la posibilidad de un empate. Así hay guerras que acaban en un *impasse* sin un claro ganador como la de Korea (1950-1953) o la de Irán e Iraq (1980-1988). Los juicios pueden acabar en un juicio nulo o «*hang jury*» en los países anglosajones. En deportes como el fútbol, el ajedrez o el cricket los empates juegan un papel importante. Finalmente en algunos concursos existe la posibilidad de que el premio, o el trabajo, no se entregue debido a que el jurado no ve suficientes méritos en los concursantes.

A pesar de su relevancia, sólo muy recientemente la literatura de las contiendas ha comenzado a considerar los empates. En esta presentación supondremos que $n=2$ para no tener que considerar todos los casos en los que n jugadores empatan. El primer trabajo se debe a Blavatskyy (2010). Éste demuestra que bajo unos axiomas inspirados en el trabajo de Skaperdas (1996), que se considerará en la siguiente sección, la probabilidad de un empate puede escribirse como:

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 G_1^r + \alpha_2 G_2^r} \tag{2.14}$$

donde α_1, α_2 y r son números reales positivos. El problema de ésta FE es que, como señalan Peeters y Szymanski (2012), es implausible que la probabilidad de un empate sea muy pequeña cuando los gastos de ambos contendientes son muy grandes e idénticos. Ellos presentan una FE en la que la probabilidad de un empate está determinada por la diferencia relativa con el único objetivo de testarla empíricamente. Jia (2012) axiomatizó una FE en la que la probabilidad de un empate puede escribirse como:

$$\frac{G_1G_2(c^2-1)}{(G_1+cG_2)(G_2+cG_1)} \tag{2.15}$$

donde c > 1. Jia demuestra que existe un único EN en estrategias puras cuando $c < 3$. Finalmente Yildizparlak (2014) presenta una FE que también admite empates y la aplica a cuatro grandes ligas de fútbol europeas (Alemania, España, Francia e Italia) con resultados positivos. En su caso la probabilidad de empate es:

$$1-\frac{\sum_{j=1}^{2}\varphi(G_j)^k}{(\sum_{j=1}^{2}\varphi(G_j))^k} \tag{2.16}$$

donde $\varphi(\cdot)$ es creciente, cóncava y derivable y $k>1$ es el parámetro que indica la propensión a empatar. Cuando $k=1$ esta FE es la aditiva. Yildizparlak demuestra que existe un único EN en estrategias puras para $k<3$. Curiosamente el valor de que, en teoría, maximiza el esfuerzo, k = 1.44, es muy cercano al estimado en las cuatro grandes ligas, que está alrededor de 1.5.

Diseño de mecanismos

Polishchuk y Tonis (2013) presentaron un enfoque novedoso al diseño de contiendas cuando existe información incompleta entre los contendientes. El planificador escoge la FE que maximiza el esfuerzo total esperado. Usando el principio de revelación encuentran la forma de la FE óptima. Para una distribución de tipos, la FE óptima es la aditiva descrita anteriormente, para otra es aditiva logarítmica tal como

$$p_i=\frac{1}{2}(\log G_i-\log G_j)+.5. \tag{2.17}$$

Para otras distribuciones obtenemos la FE de diferencias de Che y Gale (2001) o la siguiente FE que combina la FE aditiva y la de diferencias y es parecida a la de Beviá-Corchón antes citada:

$$p_i=\frac{2\varphi(G_i)-\varphi(G_j)}{\sum_{j=1}^{2}\varphi(G_j)}. \tag{2.18}$$

Cuando se requiere optimalidad ex post, la FE óptima tiene cierta semejanza con la famosa de Clark-Vickrey-Groves, lo cual no es tan sorprendente si se tiene en cuenta que las contiendas pueden verse como un problema de bienes públicos.

Un problema con estos resultados es que además del equilibrio en el que los agentes dicen la verdad pueden existir otros equilibrios en los que los agentes mienten y que, a priori, no podemos descartar. Además la FE óptima depende de la distribución de los tipos, una gran incógnita. Queda pues todavía bastante trabajo hasta que entendamos los límites y las ventajas de este enfoque para el descubrimiento de nuevas FE.

FUNDAMENTOS MICROECONÓMICOS DE LAS FUNCIONES DE ÉXITO

Hasta ahora hemos supuesto que las FE tenían una forma mas o menos plausible. Pero ahora nos preguntamos si tienen algún tipo de fundamento microeconómico. Como veremos existen varias maneras de fundamentar las FE discutidas anteriormente. Estas maneras nos permiten además descubrir nuevas FE.

Rendimiento aleatorio. En este enfoque, que fue iniciado por Dixit (1987) y Hillman y Riley (1989), se supone que el rendimiento tiene dos factores, el esfuerzo del agente y un factor aleatorio que denotaremos por ε_i. Por simplicidad supongamos que $n = 2$. Entonces el jugador gana la contienda si y solo si $\varepsilon_i G_i > \varepsilon_j G_j$. Nótese que si $\varepsilon_1 = \varepsilon_j$, tendríamos la subasta donde todos pagan. Por lo tanto en este enfoque el rendimiento individual es aleatorio y no correlacionado.

El resultado más general es debido a Jia (2008) que demuestra que si los factores aleatorios siguen una distribución exponencial inversa entonces se obtiene la forma ratio. Véanse también los trabajos de Fullerton y McAfee (1999) y de Baye y Hoppe (2003) que ofrecen micro-fundamentos de la FE aditiva en los casos de innovaciones y patentes.

Este enfoque es bastante natural pero tiene el problema de que las FE dependen mucho de las distribuciones de probabilidad del factor aleatorio de las que sabemos bien poco.

Axiomática. En este enfoque se estudian las propiedades que caracterizan a las FE. Aquí el trabajo fundamental es de Skaperdas (1996) (9). Skaperdas probó que bajo los supuestos de 1) discriminación imperfecta (i.e. que la probabilidad de ganar es siempre positiva si el esfuerzo es positivo), monotonicidad (la probabilidad de ganar aumenta con el esfuerzo), 3) anonimidad (la probabilidad de ganar no depende de la identidad del agente sino sólo de su esfuerzo) y 4) una forma de independencia de las alternativas irrelevantes, se obtiene la FE aditiva. Si a estas propiedades añadimos la de HGC obtenemos la FE de Tullock. Posteriormente Clark y Riis (1998) ofrecieron una prueba más nítida que además generalizaba la de Skaperdas a FE no simétricas. Un trabajo reciente de Vesperoni (2013) trata el caso en el que hay varios premios y axiomatiza que tipo de FE serían apropiadas en este contexto. Otro de Cubel y Sanchez-Pages (2014) axiomatiza la FE en diferencias para el caso en que los contendientes sean grupos.

Planificador. Como ya se hizo notar, algunas contiendas, como los concursos y los deportes, son diseñados y gestionados por una o varias personas. Nos referiremos a ellas como «el planificador». En este enfoque la FE se ve como consecuencia directa de las acciones optimizadoras del planificador. El primer trabajo aquí es el de Epstein y Nitzan (2006). Suponen que $n = 2$ y que el objetivo del planificador es una media ponderada del bienestar social y los esfuerzos de los contendientes. Esto último tiene una doble interpretación: por una parte, los esfuerzos pueden mejorar la calidad del premio como los planes para las Olimpiadas pueden mejorar estas. Por otra, los esfuerzos pueden interpretarse como pagos monetarios que recibe el planificador. Epstein y Nitzan estudian las condiciones en las que el planificador prefiere organizar una contienda en el que la FE es la de Tullock o la «subasta donde todos pagan» así como una comparación de cual de éstas FE sería la preferida por él.

En Corchón y Dahm (2010) el planificador puede ser de varios tipos que son desconocidos para los contendientes. Así estos pueden desconocer cual es el sesgo del planificador acerca de su procedencia, su manera de trabajar, su ideología, etc. La FE no es mas que la respuesta óptima del planificador tal y como es percibida por los contendientes. Por ejemplo supongamos que $n = 2$ y que la utilidad del planificador es:

$$U_1 = (1-\theta)\varphi(G_1) \quad \textbf{y} \quad U_2 = \theta\varphi(G_2) \tag{3.1}$$

donde θ se distribuye uniformemente en [0,1], ϕ nos mide el impacto del esfuerzo sobre la utilidad del planificador y U_i es la utilidad de éste si el contendiente *i* gana. Dados unos esfuerzos, la probabilidad de que el contendiente 1 gane es la probabilidad de que $U_1 > U_2$, que es $\phi(G_1) / \phi(G_1)+\phi(G_2)$ o sea la FE aditiva, ver (2.7). Diremos que, en este caso, la FE aditiva puede ser *racionalizada*. Corchón y Dahm prueban que cuando $n=2$ cualquier FE puede ser racionalizada. Pero cuando $n>2$ ninguna de las FE conocidas puede ser racionalizada. Esto se debe a que en las FE tradicionales la probabilidad de ganar depende simétricamente de un agregado de los esfuerzos de otros, por ejemplo de $\Sigma_{j=i}^{n} \phi(G_j)$. Pero en este enfoque la competencia está mucho mas localizada tal y como está en algunos modelos de organización industrial (por ejemplo el de Salop) en el que los pagos de un agente dependen de los pagos de sus dos competidores más cercanos.

En un trabajo posterior Corchón y Dahm (2011) consideran un planificador que no puede comprometerse a usar una FE y sólo puede asignar las probabilidades del premio una vez que los esfuerzos están hechos, lo cual en sí mismo es una FE. Suponen que el planificador maximiza una función CES que tiene los pagos de los contendientes como argumentos, esto es:

$$W(\boldsymbol{p},\boldsymbol{G}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(p_i V_i - G_i\right)^{1-r} \right)^{1/(1-r)} & \textbf{si} \quad r \neq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} \ln\left(p_i V_i - G_i\right) & \textbf{si} \quad r = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Si $r = 1$ las condiciones de primer orden nos dan

$$\left(p_i V_i - G_i\right)V_j = \left(p_j V_j - G_j\right)V_i,\ i,j = 1,\ldots,n. \tag{3.3}$$

Resolviendo este sistema obtenemos

$$p_i = \frac{1-\sum_{j=1}^{n}\left(G_j / V_j\right)}{n} + G_i / V_i \tag{3.4}$$

para $i=1,\ldots,n$, que es una FE lineal en las diferencias tal y como (2.1). La conclusión es idéntica para cualquier otro *r*. Finalmente prueban que la FE aditiva no se puede racionalizar para ningún planificador que maximice una función de los pagos de los individuos. En cambio sí se puede cuando el planificador tiene una función de utilidad à la Kahneman-Tversky (1979).

Otros micro-fundamentos. Corchón y Dahm (2010) suponen que los contendientes negocian el resultado de la contienda como puede ocurrir cuando hay un pleito por la posesión de un recurso. En este caso es mejor interpretar p_i como la parte del recurso que se asigna a *i*. Inspirándose en un resultado de Dagan y Volij (1993), fundamentan la FE aditiva como el resultado de la solución (asimétrica) de Nash al problema de la negociación en la que los esfuerzos son los pesos de cada agente. También interpretan las contiendas como una problema de reclamación («*claims*») en el que los esfuerzos inducen aspiraciones $\phi_i(G_i)$. Encuentran que la solución proporcional al problema de la reclamación induce la FE aditiva mientras que la solución «reclamación igualitaria» induce la FE de diferencias y la solución «reclamación igualitaria relativa induce la FE (2.4).

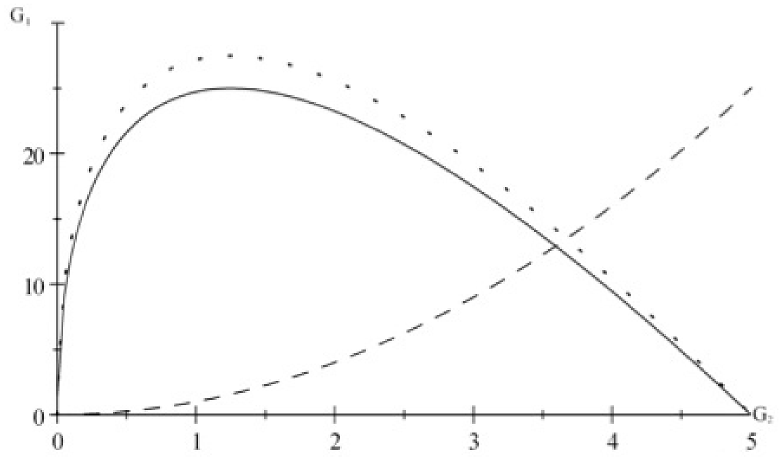
DISCRIMINACIÓN POSITIVA

La discriminación positiva consiste en dar un tratamiento preferente a ciertos grupos sociales que, en el pasado, han sido discriminados negativamente a causa de leyes, convenciones sociales, etc. Por ejemplo en los EEUU estas políticas se centran en dar oportunidades extra a las mujeres y los afroamericanos. Nadie discute la justicia de estas políticas, que corrigen abusos del pasado, pero a veces se las ha criticado por sus posibles consecuencias negativas sobre la eficiencia. En particular se ha argüido que estas políticas provocan el desánimo y, por ende, incentivan poco el esfuerzo. Como veremos, el enfoque de las contiendas sugiere que, contrariamente, el efecto más probable de las políticas de discriminación positiva es incrementar el esfuerzo de todos los participantes.

El primer trabajo teórico en este área fue de Franke (2012). Trataremos de dar una intuición sobre su principal resultado. Supongamos $n = 2$ y que tenemos una FE ratio asimétrica como la (2.10) con $\alpha_1=1$ y α_2 grande. La relación entre las alfas refleja que el agente 1

GRÁFICO 1

DISCRIMINACIÓN POSITIVA



FUENTE: Franke, 2012.

pertenece a un grupo que por haber estado discriminado en el pasado tiene un nivel de educación o de confianza menor que el agente 2. En el gráfico 1, la función de mejor respuesta de 1 (recordar (2.13)) está pintada en línea sólida y la de 2 está pintada con rayas. El EN se da en la intersección de ambas curvas. Ahora supongamos que una política de discriminación positiva incrementa el peso del agente 1 en la FE. Esto desplaza la función de mejor respuesta del agente 1 hacia arriba porque al tener mas impacto su esfuerzo éste es mas rentable. El resultado es que ambos agentes incrementan su esfuerzo. Técnicamente, el EN se da donde la estrategia del agente 2 es complemento estratégico de la estrategia del agente 1 y por eso un desplazamiento de la mejor respuesta del agente 1 hace que ambos incrementen su esfuerzo.

¿Esta predicción teórica tiene algún tipo de apoyo? Franke (2012) estudió dos tipos de torneos de golf amateur: aquellos en los que los jugadores con mejor ranking tienen un handicap y aquellos en los que no. Como todos los jugadores participan en ambos tipos de torneos es posible tratar de detectar si los handicaps tienen impacto sobre la actuación de los jugadores. La conclusión de Franke es que el handicap tiene un efecto positivo y estadísticamente significativo sobre el esfuerzo de todos los jugadores . En un trabajo posterior Calsamiglia, Franke y Rey-Biel (2013) estudiaron los resultados en la resolución de sudokus con y sin handicap con resultados parecidos; la discriminación positiva, que consistía en dar más tiempo para resolver el sudoku al grupo que peor los había resuelto en una primera fase, incrementó el porcentaje de sudokus resueltos no sólo en el grupo que recibió la ventaja, sino en el que no la recibió.

CONTIENDAS DINÁMICAS

El modelo presentado anteriormente no tiene en cuenta el componente dinámico de muchas contiendas. Así por ejemplo en muchos concursos televisivos hay unas rondas de eliminación que conducen a la final entre un número reducido de participantes. Lo mismo ocurre en las diversas copas de fútbol o en el tenis en los que los participantes juegan partidos eliminatorios. Estos son las llamadas «contiendas de eliminación». También puede ocurrir que la contienda consista en varias rondas en las que los participantes van sumando puntos y el que acaba con un número mayor de puntos gana. Esto ocurre en las numerosas ligas (fútbol, baloncesto) o en la elección del candidato por Demócratas o Republicanos a la Casa Blanca. También muchas guerras se deciden no en una sola batalla, sino en una sucesión de éstas. Estas contiendas se denominan «carreras».

Una panorámica de esta literatura puede encontrarse en Konrad (2012) por lo que aquí nos centraremos en los aspectos principales. Uno esperaría que si en una carrera uno de los contendientes estuviera muy por delante de los otros, todos aflojarían el ritmo: el que va delante porque no necesita hacer mucho esfuerzo para ganar y los que van detrás porque tendrían que hacer un esfuerzo muy grande para alcanzar al líder (estamos suponiendo que hay un solo premio que se da al final de la carrera).

Esto es lo que Konrad denomina «El Efecto del Desánimo» y que no es sino el correlato dinámico del fenómeno que se ve en el gráfico 1, a saber, que cuando la contienda es muy desigual nadie hace mucho esfuerzo. Una consecuencia de este efecto es el llamado «Efecto de New Hampshire» que es que los primeros resultados de las elecciones de un candidato para la presidencia de EEUU, son un buen predictor de quien ganará finalmente la nominación, ver Klumpp y Polborn (2006). Ello es debido a que el efecto del desánimo magnifica la ventaja de los ganadores en los primeros estadios de la contienda. Este efecto tiene su generalización en el «Efecto Mateo», descubierto por el sociólogo Robert K. Merton, que toma su nombre de una frase en la parábola de los talentos en el evangelio de San Mateo según la cual se les dará a los que ya tienen. Así, cuando un científico es ya famoso tiende a recibir mas citas que otros que no lo son pero que realizaron trabajos parecidos.

El «efecto desánimo» no es sin embargo una característica general de los juegos dinámicos. Por ejemplo si al perdedor le importa la magnitud de la derrota, una derrota en la primera batalla puede llevar a que el perdedor realice mas esfuerzo en la segunda batalla para evitar una derrota deshonrosa, ver Sela (2011). Moller (2012) y Beviá y Corchón (2013) consideran contiendas de dos períodos donde los premios ganados en la primera ronda influencian la probabilidad de ganar la segunda debido, por ejemplo, a los mayores recursos adquiridos con la victoria. Ya que ganar en la primera ronda tiene un efecto positivo sobre ganar en la segunda, los jugadores tiene un incentivo extra a realizar esfuerzo. Por lo tanto el «efecto desánimo» solo ocurre cuando la diferencia inicial entre los dos jugadores es muy grande. El «efecto Mateo» ocurre con los α pero no con la proporción recibida del premio. Así los contendientes inicialmente favorecidos por la FE tienden a serlo aún mas en la segunda etapa pero por ello, gastan menos en esa segunda etapa y por lo tanto su ventaja se diluye. Queda por ver si esta conclusión se generaliza a modelos con más períodos.

OTROS TEMAS

Esta panorámica estaría incompleta sin mencionar, aunque sea de pasada, otros temas que, actualmente, son objeto de investigación.

Información asimétrica

A veces el supuesto de que los contendientes se conocen bien es razonable –pensemos en Boeing y Airbus empeñados en un concurso para proveer unos aviones a una compañía aérea–. Pero otras vece –pensemos en un premio literario, o en las guerras– es una aproximación en el mejor de los casos. Pero la información completa no es siempre una buena aproximación. Así Einy *et al.* (2010) dieron un ejemplo en el que el equilibrio Bayesiano no existe aunque las funciones de pagos dados los tipos eran cuasi-cóncavas (10). Por lo tanto no deberíamos esperar siempre que nuestros resultados bajo información completa se trasladen, con algún tipo de ruido, a un mundo de información incompleta. Einy *et al.* (2013) prueban la existencia de un equilibrio Bayesiano en estrategias puras cuando la FE es la ratio. Cuando hay dos agentes y uno de ellos tiene una información superior el equilibrio es único y en él, el jugador con mejor información hace menos esfuerzo pero sus pagos esperados son superiores al del otro jugador. Este es otro ejemplo en el que un jugador con ventaja la aprovecha, en parte, haciendo menos esfuerzo.

Corchón y Yildizparlak (2013) estudian la guerra como un juego en el que la declaración de la misma da información sobre el tipo del contendiente. A pesar de que los contendientes pueden transferirse recursos que mitigan la desigualdad y por lo tanto dan incentivos a ser pacíficos, la guerra es a veces inevitable y además puede ocurrir con muy poca asimetría informacional (11).De nuevo aquí se prueba que el modelo de información completa no es una buena aproximación a situaciones donde hay un poco de información incompleta. Véase Jackson y Morelli (2009) para una panorámica de la teoría de los conflictos aplicada a la guerra.

Otra literatura reciente endogeneiza la información. Supongamos que el planificador sabe el tipo de los contendientes pero estos desconozcan el de su adversario. Así en un concurso literario o científico los organizadores saben la identidad de los que se han presentado pero los contendientes no. Si el planificador maximiza el esfuerzo esperado ¿debería revelar su información a los contendientes? El «Principio del vínculo» de Milgrom y Weber (1982), que se aplica a las subastas tradicionales, sugiere que el planificador debería revelar siempre su información. Pero en contiendas, esto no siempre es así. Serena (2012) muestra que cuando hay dos tipos, alto (que equivale a un α grande en (2.10) y bajo (pequeño), la revelación óptima del planificador es la revelación completa si y solo si hay dos tipos altos. Esto hace que un tipo bajo pueda creer que se enfrenta a un tipo bajo lo que le da incentivos a esforzarse (evita el efecto desánimo).

Grupos. Muchos conflictos en la vida real se producen entre dos grupos de agentes. Mancur Olson (1985) conjeturó que si dentro de cada grupo las contribuciones son voluntarias, los grupos pequeños serían capaces de evitar mejor el problema del «*free rider*». Esto se denomina la «paradoja del tamaño del grupo» ya implica que los grupos pequeños son mas efectivos que los grupos grandes al estar menos afectados por el problema del free rider. En general la paradoja no es cierta, ver mi panorámica (2007), ya que cuando un grupo admite nuevos miembros se producen dos efectos: por una parte el esfuerzo de los antiguos miembros disminuye pero se añade el esfuerzo de nueva gente. El segundo efecto domina tal y como ocurre en el modelo de Cournot en el que la entrada disminuye el output de los incumbentes pero aumenta el output total.

Recientemente la literatura se ha preguntado que ocurre cuando los grupos pueden diseñar su organización. Así Nitzan y Ueda (2011) consideran que cada grupo puede diseñar su estructura interna de recompensas simultáneamente. Más interesante es el caso en el que cada grupo diseña su esquema de incentivos con antelación a la contienda. En tal caso, el gráfico 1 sugiere que el grupo grande pondría un esquema de incentivos muy igualitario (para moverse hacia abajo en la función de mejor respuesta del grupo pequeño mientras que éste adoptaría un esquema de incentivos muy meritocrático para moverse hacia la izquierda de la función de mejor respuesta del grupo grande. Balart, Flamand y Trompounis (2014) suponen dos grupos diferentes que, antes de que se juegue la contienda, pueden establecer una regla de reparto mas o menos meritocrática. Demuestran que la naturaleza del premio –un bien público o un bien privado– afecta de manera decisiva al resultado. Un paso más allá ha sido dado por Vázquez-Sedano (2014) que aplica el diseño de mecanismos al diseño de la regla de reparto.

(*) El autor desea agradecer a la CAICYT por la beca de investigación ECO2011-25330 que posibilitó este trabajo. Agradezco a Carmen Beviá, Diego Moreno y Marco Serena sus comentarios a una versión preliminar de este trabajo.

NOTAS

[1] Una historia un poquito sesgada del concepto de búsqueda de rentas se puede encontrar en Tullock (2003).

[2] Véase Faria *et al* (2014) para un modelo en el que el esfuerzo tiene dos dimensiones.

[3] Ver Chung (1996) y Amegashie (1999) para modelos donde el premio es variable.

[4] Un trabajo reciente de Chowdhury y Sheremeta (2011) prueba que la unicidad del EN se pierde cuando hay externalidades en los costes.

[5] Sin embargo si los costes son estrictamente convexos, G^{α}_{i} con $\alpha < 1$ existe un EN en estrategias puras con ambos agentes realizando un esfuerzo positivo.

[6] Una función $x = f(y)$, donde $x \notin R^m$ es HGC si $f(y) = f(\lambda y)$ para todo $\lambda \neq 0$.

[7] La disipación de rentas supone que los esfuerzos se pierden. Cuando estos esfuerzos son dinero, éstos incrementan la utilidad de otros agentes y se dice que las rentas se transfieren.

[8] Las estrategias son sustitutos (respectivamente, complementos) estratégicos cuando la función de mejor respuesta es decreciente (respectivamente, creciente). Ver Bulow, Geanakoplos y Klemperer 1985.

[9] Este enfoque está explicado y discutido en mi anterior panorámica a la que referimos si el lector desea ampliar su conocimiento de ella.

[10] La suma de funciones cuasi-cóncavas no es cuasi-cóncava por lo que la utilidad esperada no es cuasi-cóncava y de ahí el problema de inexistencia de equilibrio.

[11] Bajo información completa, las transferencias generan paz en el EN excepto si la distribución de los recursos iniciales es enormemente desigual, ver Beviá y Corchón (2010).

BIBLIOGRAFÍA

ACEMOGLU, D. y JENSEN, M.K. (2013). «Aggregate comparative statics». *Games and Economic Behavior*, vol. 81, nº 27, pp. 49.

ALCALDE, J. y DAHM, M. (2007): «Tullock and Hirshleifer: A Meeting of the Minds». *Review of Economic Design*, vol. 11, nº 2.

AMEGASHIE, J.A. (1999): «The Number of Rent-Seekers and Aggregate Rent-Seeking Expenditures: An Unpleasant Result». *Public Choice*, nº 99, pp. 57-62.

AMEGASHIE, J. A. (2006): «A contest success function with a tractable noise parameter». *Public Choice*, vol. 126, nº 1, pp. 135-144.

BAIK, K.H. (1998): «Difference-Form Contest Success Functions and Effort Level in Contests». *European Journal of Political Economy*, nº 14, pp. 685-701.

BALART, P.; FLAMAND, S. y TROUMPOUNIS, O. (2014): «Strategic Choice of Sharing Rules in Collective Rent-Seeking and the Group Size Paradox». Documento de trabajo U. Carlos III, 3 Julio.

BAYE, M. y HOPPE., H. (2003): «The Strategic Equivalence of Rent-Seeking, Innovation, and Patent-Race Games». *Games and Economic Behavior*, nº 44, pp. 217-226.

BAYE, M.; KOVENOCK, D. y DE VRIES, C. (1996): «The All-Pay Auction with complete-information». *Economic Theory*, vol. 8, nº 2, pp. 291-305.

BECKER, G. (1983): «A Theory of Competition Among Pressure Groups for Political Influence». *The Quarterly Journal of Economics*, nº 98, pp. 371-400.

BEVIÁ, C. y CORCHÓN, L. (2010): «Peace agreements without commitment». *Games and Economic Behavior,* vol. 68, nº 2, pp. 469-487.

BEVIÁ, C. y CORCHÓN, L. (2013): «Endogenous Strength in Conflicts». *International Journal of Industrial Organization*, vol. 31, nº 3, pp. 195-306.

BEVIÁ, C. y CORCHÓN, L. (2014): «Relative difference contest success function». *Theory and Decision*. DOI 10.1007/s11238-014-9425-4.

BLAVATSKYY, P.R.: (2010): «Contest success function with the possibility of a draw: axiomatization». *Journal of Mathematical Economics*, vol. 46, nº 2, pp. 267-276.

BULOW, J.; GEANAKOPLOS, J. y KLEMPERER, P.(1985): «Multimarket Oligopoly: Strategic Substitutes and Complements». *Journal of Political Economy*, nº 93, pp. 488-511.

CALSAMIGLIA, C.; FRANKE, J. y REY-BIEL, P. (2013): «The incentive effects of affirmative action in a real-effort tournament». *Journal of Public Economics*, nº 98, C, pp. 15-31.

CHE, Y.K. y GALE, I. (2000): «Difference-Form Contests and the Robustness of All-Pay Auctions». *Games and Economic Behavior,* nº 30, pp. 22-43.

CHOWDHURY, S. y SHEREMETA, R. (2011). «Multiple equilibria in Tullock contests». *Economics Letters* vol. 112, nº 2, pp. 216-219.

CHUNG, T.Y. (1996): «'Rent-Seeking Contest when the Prize Increases with Aggregate Efforts'». *Public Choice*, vol. 87, nº 1/2, pp. 55-66,.

CLARKE, D. y Riis, C. (1998): «'Contest Success Functions: An Extension». *Economic Theory, n*º 11, pp. 201-204,.

CORCHÓN, L.C. (2000): «On the Allocative Effects of Rent-Seeking». *Journal of Public Economic Theory, vol.* 2, nº 4, pp. 483-491, october.

CORCHÓN, L.C. (2007): «The Theory of Contests: A Survey». *Review of Economic Design*», vol. 11, nº 2, pp. 69-100.

CORCHÓN, L.C. y DAHM, M. (2010): «Foundations for Contest Success Functions. *Economic Theory*. nº 43, pp. 81-98.

CORCHÓN, L.C. y DAHM, M. (2011): «Welfare maximizing contest success functions when the planner cannot commit». *Journal of Mathematical Economics*, vol. 47, nº 3, pp. 309-317.

CORCHÓN, L. y YLDZPARLAK, A. (2013): «Give peace a chance: The effect of ownership and asymmetric information on peace». *Journal of Economic Behavior & Organization,* nº 92, pp. 116-126.

COURNOT, A.A: *Recherches sur les principles mathematiques de la thèory des Richesses.* Hachette, Paris, 1838.

CUBEL, M. y SÁNCHEZ-PAGÉS, S. (2014): «An axiomatization of difference-form contest success functions». Documento de trabajo, U. central de Barcelona.

DAGAN, N. y VOLIJ, O (1993): «The bankruptcy problem: a cooperative bargaining approach». *Mathematical Social Sciences* nº 26, pp. 287-297.

EINY, E.; HAIMANKO,O.; MORENO, D. y B. SHITOVITZ, B. (2010): «On the existence of Bayesian Cournot equilibrium». *Games and Economic Behavior* nº 68, pp. 77-94.

EINY, E.; HAIMANKO, O.; MORENO, D.; SELA, A. y SHITOVITZ, B. (2014): «Tullock contests with asymmetric information». UC3M Working paper Economics, pp. 13-14

EPSTEIN, G. y NITZAN, S. (2006). «The Politics of Randomness,» *Social Choice and Welfare*, vol. 27, nº 2, pp. 423-433.

FARIA, J.; . MIXON, F.G.; CAUDILL, S.B. y WINEKE, S.J. (2014): «Two-Dimensional Effort in Patent-Race Games and Rent-Seeking Contests: The Case of Telephony». *Games*, nº 5, pp. 116-126.

FRANKE, J. (2012): «Affirmative action in contest games,» *European Journal of Political Economy*, vol. 28, nº 1, pp. 105-118.

FRANKE, J. (2012): «The incentive effects of levelling the playing field – an empirical analysis of amateur golf tournaments,» *Applied Economics*, vol. 44, nº 9, pp. 1193-1200.

FULLERTON,R.L. y MCAFEE, R.P. (1999): «Auctioning Entry into Tournaments»'. *Journal of Political Economy*, nº 107, pp. 573-605.

HILLMAN, A. y J. Riley, J. (1989): «Politically Contestable Rents and Transfers». *Economics and Politics*, vol. 1, nº 1, pp. 17-39.

HIRSHLEIFER, J. (1989): «Conflict and Rent-Seeking Success Functions: Ratio vs. Difference Models of Relative Success». *Public Choice*, nº 63, pp. 101-112.

HIRSHLEIFER, J. (1991). The technology of conflict as an economic activity Papers and Proceedings». *The American Economic Review*, vol. 81, nº 2, pp. 130-134.

JACKSON, M. y MORELLI, M. (2009): «The Reasons for Wars – an Updated Survey». *Handbook on the Political Economy of War,* en prensa.

Jia, H. (2008): «A stochastic derivation of the ratio form of contest success functions». *Public Choice* nº 135, pp. 125-130.

JIA, H. (2012): «Contests with the Probability of a Draw: A Stochastic Foundation.» *Economic Record*, nº 88, pp. 282- 391.

JIA, H.; SKAPERDAS, S. y VAIDYA, S. (2013): «Contest functions: Theoretical foundations and issues in estimation». *International Journal of Industrial Organization,* vol. 31, nº 3, pp. 211-222.

KAHNEMAN, D. y TVERSKY, A. (1979): «Prospect theory: an analysis of decision under risk». *Econometrica* º 47, pp. 263-291.

KONRAD, K. (2012): «Dynamic contests and the discouragement effect». *Revue d'Economie Politique*, vol. 122, nº 2, pp. 233-256.

KLUMPP, T. y POLBORN, M. (2006): «Primaries and the New Hampshire Effect,» *Journal of Public Economics*, vol. 90, nº 6-7, pp. 1073-1114.

KRUEGER, A (1974): The Political Economy of the Rent-Seeking Society. *American Economic Review, nº* 64, pp. 291-303.

Milgrom, P. y WEBER, R. (1982): «A Theory of Auctions and Competitive Bidding», *Econometrica*, nº 50, pp. 1089-1122.

MÖLLER, M. (2012): «Incentives versus Competitive Balance». *Economics Letters*, vol. 117, nº 2, pp. 505-508.

NASH, J. (1950): Equilibrium Points in N-Person Games. Proceedings of the National Academy of Sciences, nº 36, pp. 48-9.

NEARY, H. A. (1997): «Comparison of rent-seeking models and economic models of conflict». *Public Choice*, vol. 93, nº 3-4, pp. 373-388.

NITZAN, S. (1994): «Modelling Rent-Seeking Contests». *European Journal of Political Economy,* nº 10, pp. 41-60.

NITZAN, S. y UEDA, K. (2011): «Prize sharing in collective contests,» *European Economic Review*, nº 55, pp. 678-687.

OLSON, M. (1985): *The logic of collective action*. Harvard University Press, Cambridge.

PÉREZ-CASTRILLO, D. y VERDIER, T. (1992): «A General Analysis of Rent-Seeking Games». *Public Choice, nº* 71,pp. 351-361.

PEETERS, T. y SZYMANSKI, A. (2012). «Vertical restraints in soccer: Financial Fair Play and the English Premier League». Working Paper 2012028, University of Antwerp, Faculty of Applied Economics.

SELA, A (2011): «Best-of-Three All-Pay Auctions». *Economics Letters*, vol. 112, nº 1, pp. 67-70.

SERENA, M. (2014) «Information in contests». October 13, 2012 SSRN working paper http://www.gtcenter.org/Downloads/Conf/Serena 1862.pdf.

SKAPERDAS, S. (1996): «Contest Success Functions». *Economic Theory,* nº 7, pp. 283-290.

TULLOCK, G. (1967): «The Welfare Cost of Tariffs, Monopolies and Theft». *Western Economic Journal*, nº 5, pp. 224-232.

TULLOCK, G. (1980): Efficient Rent-Seeking. in J.M. Buchanan, R.D. Tollison and G. Tullock (eds.) *Towards a Theory of a Rent-Seeking Society*, Texas A&M University Press, pp. 97-112i.

Tullock, G. (2003): «The Origin Rent-Seeking Concept». *International Journal of Business and Economics*, nº 2, pp. 1-8.

VÁZQUEZ-SEDANO, A. (2014): «Sharing the Effort Costs in Group Contests». May 21, 2014. SSRN working paper: http://ssrn.com/abstract=2439828.

VESPERONI, A. (2013). «A contest success function for rankings». Mimeo, University of Siegen.

YILDIZPARLAK, A. (2014): «Contests with ties and an application to soccer». SSRN working paper: http://ssrn.com/abstract=2270351.